数理解析研究所講究録
319巻 1978年 115-123

S^1 作用をもつ単連結4次元多様体

岡山大・理 吉田朋好

S^1 を絶対値1の複素数のなす乗法群とする。S^1 の4次元 C^∞ 閉多様体の上の C^∞ 作用を考える。

定理

M^4 を4次元 C^∞ 閉多様体とする。M^4 の上に自明でない S^1 の C^∞ 作用があれば、M^4 は連結和

$$\Sigma^4 \# kCP^2 \# l(-CP^2) \# m(S^2 \times S^2)$$

$$(k, l, m: \text{整数})$$

に微分同相である。ここに Σ^4 はホモトピー4球面、CP^2 は複素射影平面(自然な向きをもつ)、$-CP^2$ は逆に向きづけられた CP^2, S^2 は2次元球面をあらわす。3次元又は4次元ポアンカレ予想が正しければ、$\Sigma^4 = S^4$ ととれる。

とくに上の定理で M^4 を Spin-多様体と仮定す

れば M^4 は連結和 $\Sigma^4 \# m(S^2\times S^2)$ に微分同相である。故に

系 4次元 C^∞ 閉 spin 多様体が自明でない S^1 作用をもつならば、それは $\Sigma^4 \# m(S^2\times S^2)$ に微分同相でとくに index $=0$ である。

例. CP^3 の中の hypersurface $\{z_0^d+z_1^d+z_2^d+z_3^d=0\}$ は d: even $\geqq 4$ のとき自明でない C^∞ S^1 作用をもたない。

定理の証明

M^* を orbit space M/S^1 とし、$\pi: M \longrightarrow M^*$ を自然な射影とする。微分可能 slice 定理から、R^3 の上の有限巡回群の線形表現をみることにより M^* は 3次元位相多様体になる。F を固定点集合とすれば、F の各連結成分は余次元が偶数の C^∞ 閉多様体となるから、それは離散点と ~~2つ~~ 2次元 orientable 曲面となる。π は基本群の全射をもたらし M が単連結だから M^* は単連結となる。さらに ∂M^* ($=M^*$ の境界) の各連結成分は、F の 2次元連結成分と1対1に対応する。従って Poincaré duality

と M^4 の単連結性から F の2次元連結成分はすべて単連結, ゆえに S^2 となる。従って F はいくつかの離散点といくつかの S^2 の disjoint union となる。

$m \geqq 2$ を2以上の整数とし, $Z_m \subset S^1$ を位数 m の有限巡回群とする。$F(m)$ で M の Z_m による固定点集合をあらわす。すなわち $F(m)=\{x\in M \mid G_x \supset Z_m\}$, ($G_x$ は x の isotropy 群)。$F\subset F(m)$ であり $F(m)$ の F に含まれない連結成分は, 2次元 orientable 閉曲面で自明でない S^1 作用をもつ。故にそれは S^2 か T^2 (2次元トーラス) となるが, T^2 の場合はその上に S^1 の固定点がないことから もし $T^2 \subset F(m)$ ならば 基本類 $[T^2]$ は $H_2(M\,;\,Z)$ の trivial でない torsion element をあらわすことになる。ところが M^4 の単連結性から $H_2(M\,;\,Z)$ は torsion をもたず これは不可能である。故に $F(m)$ はやはり 離散点と S^2 の disjoint union となる。

2次元球面 $S_1 = S^2 \subset \overline{F(m)-F}$ をとれば, S_1 の上に S^1 は2つの固定点をもつから それを p_1, p_2 とあらわし, $p_1 S_1 p_2$ とかくことにする。もし $S_2 = S^2 \subset \overline{F(m)-F}$

があって、S_2 が固定点 p_2 と p_3 をもつならば、これを $p_1S_1p_2S_2p_3$ とあらわすことにする。ここで $p_1=p_3$ という場合もおこりうる。こうして、列 $p_1S_1p_2S_2 \cdots p_{k-1}S_{k-1}p_k$ $(p_i \neq p_j \quad 1 \leqq i \leqq k-1)$ を得る（ただし各 S_i について $S_i \subset \overline{F(m_i)-F}$ $m_i \geqq 2$ とする。）。このとき $p_1=p_k$ ならばこれを cycle とよぶことにする。

$p_1 \neq p_k$ で列 $p_1S_1p_2S_2 \cdots p_{k-1}S_{k-1}p_k$ が極大のとき、p_1 と p_k を invariant な semi free S^1 作用をもつ2次元球面で結んでこれを S_k とおけば $p_1S_1p_2S_2 \cdots p_kS_{k+1}p_1$ は cycle となる。

補題

$p_1S_1p_2S_2 \cdots p_{k-1}S_{k-1}p_kS_kp_1$ を cycle とし、多くとも一つの S_i を除いて各 $S_j \subset \overline{F(m_j)-F}$ $(m_j \geqq 2)$ とする。もし、$k \geqq 3$ ならばある S_l $(1 \leq l \leq k)$ は自己交点数 $= \pm 1$ or 0 である。

証明　略

そこで S_l の自己交点数を ± 1 とすれば、S_l の invariant 法バンドル ν_l は S^2 上の Hopf バンドル又はその共役バンドルに同値である。$D(\nu_l)$, $S(\nu_l)$ を ν_l の球体バンドル、球面バンドルとする。$S(\nu_l)$ は3次元球面 S^3 に微分同相である。

S^3 の上の C^∞ S^1 作用はすべて線形作用に同値であるから（[1]）、$S(\nu_\ell)$ の作用は4次元球体 D^4 の上に線形に拡張でき、これは D^4 の中心を固定点にもつ。そこで２つの多様体 M'、K を $M' = \overline{M - D(\nu_\ell)} \cup D^4$，$K = D(\nu_\ell) \cup D^4$（同変微分同相ではりあわせたもの）とすれば、$M$ は M' と K の同変連結和 $M' \# K$ と同変微分同相になる。K は S_ℓ の自己交点数が $+1$ または -1 に応じて、$\mathbb{C}P^2$ または $-\mathbb{C}P^2$ に微分同相だから $M \approx M' \# (\pm \mathbb{C}P^2)$ となり、M' は M より離散固定点の個数が一つだけ少い。

次に S_ℓ の自己交点数 $= 0$ とする。$k \geqq 3$ だから $S_{\ell-1}$（または $S_{\ell+1}$）をとることにより $S_{\ell-1} \cap S_\ell = P_\ell$ で $S_{\ell-1}$ と S_ℓ は P_ℓ で横断的に交わる。$S_{\ell-1}$，S_ℓ の球体バンドルを $D(\nu_{\ell-1})$，$D(\nu_\ell)$ とし、$D(\nu_{\ell-1}) \cup D(\nu_\ell)$ を考えると、S_ℓ の自己交点数 $= 0$ から $\partial(D(\nu_{\ell-1}) \cup D(\nu_\ell))$ は3次元球面 S^3 に微分同相である。そこで上と同じ操作により $M' = \overline{M - D(\nu_{\ell-1}) \cup D(\nu_\ell)} \cup D^4$，$K = (D(\nu_{\ell-1}) \cup D(\nu_\ell)) \cup D^4$ をつくれば、M は同変連結和 $M' \# K$ と同変微分同相である。K は

$S_{\ell-1}$の自己交点数が偶数か奇数かに応じて$S^2\times S^2$か$CP^2\#(-CP^2)$に微分同相であるから、このとき$M\approx M'\#(S^2\times S^2)$ or $M'\#(CP^2\#-CP^2)$となる。M'の離散固定点の数はMの離散固定点の数より2つ少くない。

以上のように、もし$k\geqq 3$のcycleがMの中にとれれば$\pm CP^2$又は$S^2\times S^2$, $CP^2\#-CP^2$を出すことができるから、この操作を続けることによりM'の中には$k\geqq 3$のcycleが存在しなくなるまでreduceすることができる。

補題

M'の中には$k\geqq 3$のcycleが存在しないとする。このときM'はsemi-free S^1作用をもつ。

証明　略

上の補題によりsemi-free S^1作用をもつM'を考えればよい。

補題

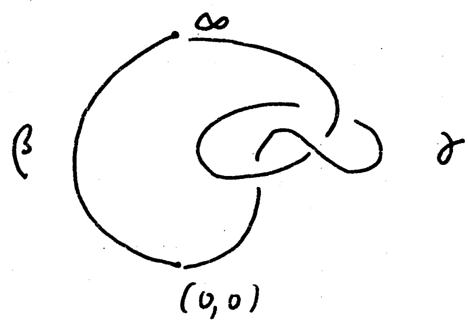
M'はsemi-free S^1作用をもつとする。このとき、固定点集合Fの連結成分の個数が$\geqq 2$ならば、M'の中にinvariant 2次元球面S^2で、その自己交点数が± 1 or 0であるものが存在する。

証明 略

この補題により、先にしたのと同じ操作を続けることで、M' を $M''\# kCP^2 \# l(-CP^2) \# m(S^2\times S^2)$ の形に reduce できる。ただし M'' は S^1-多様体でその固定点集合は2個の離散点からなるか、又は一つの S^2 からなる。したがって M'' は単連結4次元多様体で $\chi(M'')=2$ だから ホモトピー球面である。

S^4 の上の exotic S^1 action の構成

$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ を2次元複素ベクトル空間とし、one-compactification $(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C})^c$ を S^4 とみなす。$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ の上に S^1-作用を $t\cdot(x,y)=(t^2x,\ ty)$, $(x,y)\in\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$, $t\in S^1$ で与え これを $S^4=(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C})^c$ に拡張する。この作用の orbit space は3次元球面 S^3 である。$\pi: S^4\longrightarrow S^3$ を orbit map とする。$(0,0)$ と ∞ が固定点集合であり $\beta=\pi((\mathbb{C}\oplus 0)^c)$ が $F(2)$ の orbit で これは $(0,0)$ と ∞ を結ぶ arc である。S^3 の中に $(0,0)$ と ∞ を結ぶ arc γ を次のようにとる。



ただし γ は $\pi^{-1}(\gamma)$ が smooth に embed された 2次元球面で $F(2) = \pi^{-1}(\beta)$ と $(0,0)$, ∞ で横断的に交わっているようにえらぶ。2次元球面 $\pi^{-1}(\gamma)$ の法バンドルは自明でこれを ν とおく。$D(\nu)$ を ν の球体バンドルとする。$D(\nu) \approx S^2 \times D^2$ であるが, $D(\nu)$ 上の S^1 作用は, $S^2 \times D^2$ 上の $t(u,v) = (tu, t^2 v)$ $t \in S^1$, $(u,v) \in S^2 \times D^2$ で定義される S^1 作用と同一視できる。$(S^2 \times D^2)'$ を $t(u,v) = (t^5 u, t^2 v)$ $t \in S^1$, $(u,v) \in S^2 \times D^2$ で S^1 作用を与えた $S^2 \times D^2$ とする。このとき同変微分同相 $f : \partial(S^2 \times D^2)' \longrightarrow \partial(S^2 \times D^2)$ で恒等写像に isotopic なものがとれる。そこで $M = (S^4 - \mathring{D}(\nu)) \cup_f (S^2 \times D^2)'$ とおけば, M は S^4 に微分同相な S^1 多様体となる。この S^1 作用は線形作用に同値でなく, $F(2)$, $F(5)$ は各々 S^4 の knotted 2-sphere となる。

[1] P. Orlik, F. Raymond : Actions of SO(2) on 3-Manifolds, Proc. of the Conference on Transformation Groups, Springer 1967.

[2] T. Yoshida : Simply connected smooth 4-manifolds which admit non-trivial circle actions.